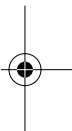
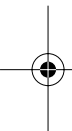


Les options parisiennes et leurs applications



Carole Bernard
Université Lyon-I, ISFA

Olivier Le Courtois¹
EM Lyon

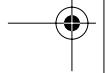
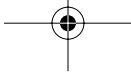


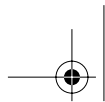
I Introduction

Cette étude s'intéresse aux emplois d'un produit exotique complexe et fortement *path-dependent* : les options parisiennes. Ces dernières forment une extension des options à barrière dans le sens où elles sont activées ou désactivées si leur sous-jacent est resté strictement au-delà ou en deçà d'un niveau prédéfini pendant une période de surveillance donnée. Chesney, Jeanblanc et Yor (1997) ont, les premiers, fourni une formule semi-explicite permettant d'évaluer les options parisiennes. Cette formule fait intervenir des transformées de Laplace inverses. Bernard, Le Courtois et Quittard-Pinon (2004) ont montré, dans un récent numéro de *Banque & Marchés*, comment réaliser numériquement ces inversions en un temps quasi-instantané. On note que d'un point de vue opérationnel, les méthodes numériques plus classiques d'évaluation d'options sont quasiment inemployables (voir toutefois les travaux de Schröder, 2003 et de Kwok et Lau, 2001).

1. Les auteurs de cet article tiennent à remercier cordialement Monique Jeanblanc, Franck Moraux, François Quittard-Pinon et Bruno Versaevel pour leurs commentaires pertinents.

La surveillance est un concept générique qui recouvre le fait d'examiner la trajectoire d'un sous-jacent sur une période donnée et d'en déduire une action ou une valorisation suivant son comportement, perçu ici comme le fait de dépasser un niveau discriminant pendant une période donnée. Les sous-jacents qui intéressent le gestionnaire peuvent être une action, des actifs, un ratio d'endettement... De Giuli, Maggi et Paris (2003), puis Bernard, Le Courtois et Quittard-Pinon (2004) considèrent le cas de la surveillance des actifs d'une banque dans un système mutuel d'assurance des dépôts bancaires. Dans ce cadre, les garanties et éventuelles pénalités s'évaluent comme des options parisiennes, en relation avec la surveillance et les modalités contractuelles qui, elles-mêmes, admettent un caractère parisien. La théorie du défaut a également connu des extensions faisant appel à une surveillance « parisienne ». François et Morellec (2004) et Moraux (2004) se sont attachés à la description du système de faillite américain du *Chapter 11* au sein duquel l'entreprise en difficulté se voit mise sous observation, et sa survie ultime dépend, ici aussi, du respect de contraintes s'apparentant à celles existantes dans les systèmes d'assurance de dépôts bancaires. Enfin, les aspects parisiens peuvent également se rencontrer en théorie des options réelles : voir pour cela la thèse de Gauthier (2002) qui réalise





un magnifique tour d'horizon sur l'utilité d'inclure dans cette théorie des outils exotiques puissants tels que les options parisiennes.

Notre étude vise donc à présenter les applications que les options parisiennes peuvent trouver dans les diverses branches de la finance, ceci grâce à l'existence de mécanismes de surveillance élaborés, où les dimensions de valeur et de temps s'intègrent de manière pertinente.

I. Les options parisiennes : un caractère exotique marqué

1. Les produits

Les options parisiennes ont été introduites en 1997 par Chesney, Jeanblanc et Yor. Ces options sont des extensions d'options à barrière, structurées de telle manière à être plus sûres pour l'acquéreur. Une option à barrière est activée ou désactivée quand le sous-jacent considéré atteint une barrière supérieure ou inférieure. Il y a ainsi huit types d'options à barrière, si on les distingue selon les trois critères suivants : options d'achat ou de vente (*call/put*), options à activation ou désactivation (*in/out*), options à barrière haute ou basse (*up/down*, c'est-à-dire à franchissement de la barrière par en dessous ou en dessus). De manière strictement similaire, il existera huit types distincts d'options parisiennes (ex : *Parisian up and out call*). Quelle est alors la spécificité des options parisiennes par rapport aux options à barrière ? Une option parisienne ne sera activée ou désactivée que si le sous-jacent passe strictement (c'est-à-dire sans retransversée) un temps minimum au-delà de la barrière. Ainsi un *call up and in* parisien, de paramètres caractéristiques L et D , ne sera activé que si le sous-jacent passe plus de la durée D au-dessus du niveau L , après l'avoir atteint, sans le retransverser, et ceci bien sûr avant la maturité.

Le caractère parisien constitue une sûreté appréciable pour un investisseur ayant acheté des options à barrière *out*. Un vendeur d'options à barrière peut chercher, si les coûts apparaissent inférieurs aux bénéfices, à manipuler le marché pour que le sous-jacent atteigne la barrière désactivante, annulant ainsi toutes les options *out*. Avec le caractère parisien en sus, le vendeur de l'option devrait manipuler le marché typiquement pendant plusieurs jours afin que le sous-jacent reste une durée supérieure à D au-delà du niveau L – condition de désactivation. Ici réside donc tout l'intérêt des options parisiennes en tant qu'instruments financiers : elles rendent leurs lettres de noblesse aux options à barrière, permettant de construire une classe de produits exotiques subtils et a priori non sujets à un risque de manipulation de marché. Nous verrons plus loin que les options parisiennes présentent d'autres avantages, en tant que mode de formalisation et d'évaluation de mécanismes normatifs de surveillance. Ici, nous nous concentrons sur les produits financiers en tant que tels et nous étudions les options parisiennes standard et leurs applications. Chesney, Jeanblanc et Yor ont également introduit en 1997 des options parisiennes dites cumulatives, où une horloge compte le temps passé au-delà du niveau critique, sans s'arrêter aux retransversées intempestives de ce niveau. Dès que

l'horloge indique qu'une durée supérieure à D a été passée au-delà du niveau, l'option est activée ou désactivée selon son type. Hugonnier a proposé en 1999 une formule d'évaluation de ces produits par quadratures multiples (calculable instantanément en pratique). Moraux a apporté une correction à cette formule en 2002.

2. Relations de parité

Avant d'aller vers l'évaluation des options parisiennes, on peut se demander s'il est nécessaire de développer une formule pour chacune d'entre elles (se rappeler qu'il en existe huit sortes), ou s'il suffit d'obtenir un nombre restreint de formules pour quelques options et d'évaluer les options restantes par des relations de parité. En pratique, c'est la deuxième situation qui prévaut. Parmi les relations de parité utilisables, il y a la suivante, très simple, qui dit qu'une option *out* ajoutée à une option *in* est une option standard ; si l'on considère des *puts* par exemple :

$$P_0^d + P_L^d = P$$

où l'on dit que la somme d'un *put down and out* et d'un *put down and in* est un *put* standard. En effet, les deux caractères *in* et *out* sont complémentaires, et dès lors la condition parisienne ne se pose plus.

Sont également disponibles des relations de parité permettant de passer des prix des *calls* aux prix des *puts*, ou inversement. Rappelons ici des notations standard que nous conserverons dans le reste de cet article : x désigne la valeur initiale du sous-jacent, T la maturité, K le strike, L le niveau de la barrière, D la durée nécessaire à l'activation ou la désactivation, la quantité de *payout* c'est-à-dire en général de dividende, r le taux d'intérêt sans risque. On a alors :

$$P_0^d(x, T, K, L, D, r, \delta) = xKC_o^u\left(\frac{1}{x}, T, \frac{1}{K}, \frac{1}{L}, D, \delta, r\right)$$

où l'on voit que le prix d'un *put down and out* peut être obtenu simplement à partir du prix d'un *call up and out*.

Remarquons enfin que le prix d'une option parisienne est encadré par les prix d'options à barrière et d'options standard. Pour D extrêmement faible, une option parisienne se comporte comme une option à barrière. À l'inverse pour D supérieur ou égal à T , la condition parisienne n'a plus de sens et le produit est soit annulé, soit transformé en une option standard.

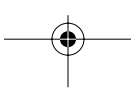
3. Évaluation des produits

Passons à présent à l'évaluation proprement dite de ces produits. Cette dernière repose sur l'utilisation de temps liés aux trajectoires parcourues par un mouvement brownien. Le premier de ces temps, utile à l'analyse et à l'évaluation de ces produits, est le suivant :

$$g_t^b(X) = \sup\{s \leq t, X(s) = b\}$$

où l'on voit qu'il s'agit du dernier temps, avant la date arbitraire t , auquel le processus X passe par le niveau choisi b . De ce temps, l'on déduit la définition d'un second temps :

$$G_{D,L}^-(X) = \inf\{t > 0 | (t - g_t^L(X))1_{X(t) \leq L} \geq D\}$$



qui correspond au premier instant tel que la durée le séparant de la dernière fois où l'on est passé par L est plus grande que D . On impose ici également que le processus soit au-dessous du niveau L à cet instant donné. Autrement dit, on a construit le premier instant où le processus est resté une durée supérieure à D au-dessous de L . Il s'agit du temps parisien à partir duquel les formules d'évaluation d'options parisiennes peuvent s'écrire.

Nous nous plaçons dans un cadre classique de Black et Scholes où les dynamiques sous-jacentes sont supposées vérifier :

$$\frac{dS}{S} = (r - q)dt + \sigma dz$$

ce qui peut s'intégrer en :

$$S(t) = x \exp(\sigma(mt + z(t)))$$

et où l'on a posé pour simplifier :

$$m = \frac{1}{\sigma} \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

Le prix d'une option d'achat *down and in*, par exemple, s'écrit ainsi :

$$C_i^d = e^{-rT} E_Q(x e^{\sigma(mt + z(T))} - K)^+ 1_{G_{D,L} < T}$$

Considérons le sous-cas où $K > L$, Chesney, Jeanblanc et Yor montrent qu'alors :

$$C_i^d = e^{-\left(r + \frac{m^2}{2}\right)T} \int_0^\infty e^{my} (x e^{oy} - K) h_1(T, y) dy$$

où la fonction h_1 admet une expression trop compliquée pour être calculée directement. En revanche, les mêmes auteurs obtiennent une formule explicite pour $\hat{h}_1$, la transformée de Laplace en temps de h_1 . Cette formule est obtenue en utilisant la théorie des excursions du mouvement brownien. Un de ces résultats remarquables est notamment que le temps est pour un mouvement brownien Z indépendant de la valeur $Z_{G_{D,L}}$ de ce brownien en ce temps. La transformée de Laplace de h_1 s'écrit ainsi :

$$\hat{h}_1(\lambda, y) = \frac{e^{(2b-y)\sqrt{2\lambda}} \Psi(-\sqrt{2\lambda D})}{\sqrt{2\lambda} \Psi(\sqrt{2\lambda D})}$$

où b et Ψ sont définis de la façon suivante :

$$b = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{L}{x}\right) \quad \Psi(z) = 1 + z \sqrt{2\pi} e^{\frac{z^2}{2}} N(z)$$

et où N est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Il apparaît donc qu'une option parisienne est l'intégrale d'une fonction dont on connaît la transformée de Laplace. L'intégrale se calcule facilement par quadrature. L'estimation de la fonction à intégrer pose plus de problèmes : il s'agit de l'obtenir par inversion de sa transformée de Laplace.

Il est utile de remarquer qu'une transformée de Laplace inverse se calcule beaucoup plus difficilement qu'une transformée de Fourier inverse (qui n'est numériquement qu'une transformée de Fourier). Une approche classique pour y parvenir est la méthode d'Abate et Whitt qui consiste à intégrer la fonction transformée dans le plan complexe le long

d'une droite située à droite de toutes les singularités existantes, plus précisément à discrétiser le long de cette droite et à obtenir une série quasi alternée dont le calcul peut-être accéléré par méthode d'Euler.

Bernard, Le Courtois et Quittard-Pinon ont proposé en 2004 une méthode de calcul de transformée de Laplace inverse bien adaptée à l'obtention de fonctions du type de h_1 . Cette approche est non seulement simple mais également extrêmement rapide : elle permet de calculer les prix et sensibilités des options parisiennes de manière instantanée avec un degré de précision d'environ 4 décimales. Ce degré de précision a été vérifié par la comparaison avec des prix obtenus par méthode (entre autres) de Monte-Carlo – où l'on se rend bien compte sur ces produits extrêmement *path-dependent* que les simulations prennent trop de temps pour être envisageables par des praticiens. Nous invitons le lecteur à consulter également l'article de Chesney, Cornwall, Jeanblanc, Kentwell et Yor (1997) sur le *pricing* d'options parisiennes.

4. Couverture

Venons-en maintenant aux aspects de couverture des options parisiennes. Ici également, les techniques de transformées de Laplace inverse s'avèrent nécessaires. De fait, on ne peut calculer les grecs de manière directe ; en revanche il est possible d'exhiber des formules de transformées de Laplace de ces grecs (formules qu'il conviendra donc d'inverser).

Concernant par exemple le delta d'une option d'achat *down and in*, soit $\Delta = \frac{\partial C_i^d}{\partial x}$, on peut en calculer la transformée de Laplace qui s'exprime comme :

$$\hat{\Delta}(\lambda) = \frac{-\Psi(-\sqrt{2\mu D}) \left(\frac{K}{x}\right)^{\frac{m+\sigma-\sqrt{2\mu}}{\sigma}}}{\Psi(\sqrt{2\mu D})} \frac{e^{2b\sqrt{2\mu}(m+\sqrt{2\mu})}}{(m+\sigma-\sqrt{2\mu})(m-\sqrt{2\mu})\sqrt{2\mu}}$$

dans le cas où $L \leq x$ et $K > L$, et en notant :

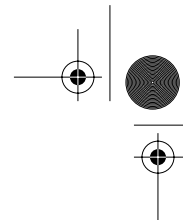
$$\mu = \lambda + \frac{m^2}{2} + r.$$

Il suffit alors d'inverser la formule plus haut pour obtenir le delta de l'option d'achat. Le principe de calcul d'un gamma est exactement le même. Ici, il convient de bien remarquer que les grecs sont aussi rapides à calculer que les prix des options, ce qui est loin d'être le cas en toute généralité.

Après avoir présenté les options parisiennes et leurs méthodes d'évaluation et de couverture, nous passons à présent à une première gamme d'applications en finance d'entreprise et nous nous penchons sur le problème de l'évaluation et de la mise en place d'assurances de dépôts bancaires.

II La surveillance et les dépôts bancaires

Dans la plupart des pays, un système de garantie des dépôts bancaires est mis en place afin de prévenir les faillites bancaires et d'assurer une confiance et une stabilité bancaire et économique. Ces systèmes sont financés par les



adhérents : déposants ou banques, par l'État, ou par les deux. Les cotisations, obligatoires ou non, sont payées *ex ante* ou *ex post*. Aux États-Unis la garantie des dépôts est assurée par une agence gouvernementale, le FDIC (*Federal Deposit Insurance Corporation*). En France, de 1976 à 1999, un paiement forfaitaire se faisait *ex post* par un appel de fonds aux membres de l'AFB (Association française des banques) en cas de défaut constaté d'un des membres. Aujourd'hui le paiement des primes se fait *ex ante* au fonds de garantie des dépôts en tenant compte de la probabilité de faillite de l'organisme de crédit adhérent. Le paiement de primes *ex ante* forfaitaires uniformes entre les adhérents, sans étude actuarielle, induit nécessairement de l'aléa moral (cf. Laeven, 2002). Il apparaît aujourd'hui nécessaire de proposer une tarification cohérente avec le risque représenté par la banque dans le système et de trouver un mode d'évaluation des garanties le plus juste possible.

Principalement, deux approches sont en compétition. La première – celle que nous considérerons ensuite – consiste à évaluer les garanties bancaires comme des produits dérivés. Le cadre classique est celui du modèle de Black et Scholes. Le premier auteur à donner une modélisation du problème d'assurance des dépôts utilisant cette approche est Merton (1977). La seconde approche est l'approche actuarielle. Les primes de garanties bancaires sont égales aux montants moyens de perte. Le lecteur peut se reporter à l'article de Laeven (2002) ou du FDIC pour des références détaillées de cette méthodologie. L'idée est de calculer la perte moyenne comme le produit d'une probabilité de défaut par un montant en cas de défaut. Les probabilités de défaut moyennes sont calculées à partir des données fournies par des agences telles que Moody's.

Le fonctionnement d'un tel système de protection des dépôts nécessite la surveillance des établissements de crédit. Il s'agit de surveiller les banques d'une part pour leur faire payer une prime à la hauteur du risque couvert, et d'autre part afin de les inciter à minimiser leur prise de risque. Cette surveillance peut-être de type parisienne ; elle est alors basée sur l'observation dans le temps du niveau des actifs ou du niveau d'endettement des établissements de crédit concernés. Nous allons illustrer ces propos en nous concentrant désormais sur l'étude du système de garantie des dépôts italiens.

Dans le système italien, les dépôts sont garantis en intégralité par un groupement de banques et ensuite par réassurance auprès du gouvernement. En cas de faillite d'un des membres, le consortium de banques couvre les pertes jusqu'à un montant maximum, et le gouvernement n'intervient que si le montant de défaut est supérieur. Un tel système est décrit par De Giuli, Maggi et Paris (2003) puis par Bernard, Le Courtois et Quittard-Pinon (2004). Nous allons détailler les différentes clauses du système et voir comment le caractère parisien intervient. Évaluer la valeur des garanties fournies par le gouvernement et le consortium à un des membres adhérents revient à calculer la prime juste due à la fois au consortium et au gouvernement. En s'appuyant sur les principes de l'approche de Merton (1977), on montre que l'évaluation de garanties se ramène en fait à un calcul d'options, correspondant aux contributions respectives du consortium et du gouvernement dans ce système de coassu-

rance. En s'appuyant sur la théorie de l'évaluation des options, nous pouvons évaluer numériquement ces garanties.

Nous allons étudier à partir de maintenant l'impact de clauses d'exclusion de type parisienne sur la valeur des garanties bancaires et sur l'incitation des banques à réduire leur prise de risques. Nous verrons alors comment ces évaluations peuvent expliquer le comportement des établissements de crédit, et notamment leur propension à augmenter leur prise de risque plutôt qu'à la diminuer. Dans le système italien, aucune prime n'est payée au gouvernement et les primes versées au consortium sont trop faibles. Par conséquent, les banques, subventionnées par ce système sont confrontées à de l'aléa moral. Nous proposons alors dans une dernière partie l'introduction d'une pénalité visant à inciter les banques à réellement réduire leur prise de risque – une taxe payée au consortium en cas de prise de risque jugée trop importante.

1. Modèle de Merton

Dans un modèle Mertonien, la valeur de la garantie est une option de vente sur les actifs V de la banque. À l'échéance T , la valeur de l'option de vente s'écrit :

$$\max(D_T - V_T, 0) = (D_T - V_T)^+$$

où D_T est le montant des dépôts à l'échéance. Nous supposons tout au long de notre étude que le taux d'intérêt r est constant et que le montant des dépôts assuré est déterministe : $D_T = e^{rT}D_0$ et correspond au prix d'exercice de l'option. Dans le cas italien, nous prenons en compte le niveau K maximum de couverture du consortium. Le gouvernement rembourse donc le montant de défaut par excès de K , *idem est* $D_T - V_T - K$. De ce fait, la valeur de la garantie du gouvernement est une option de vente sur les actifs de prix d'exercice $D_T - K$ et de valeur à l'échéance :

$$(D_T - V_T - K)^+$$

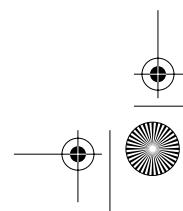
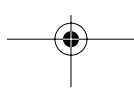
La valeur de la garantie du consortium s'en déduit et est égale à l'échéance à la différence entre la valeur de la garantie totale et le montant payé par le gouvernement. Ainsi le prix à l'échéance payé par le consortium s'exprime comme un *spread* entre deux options de vente :

$$(D_T - V_T)^+ - (D_T - V_T - K)^+$$

Ainsi, nous décomposons la valeur totale de la garantie des dépôts en somme de deux produits financiers : une option de vente pour la garantie du gouvernement et un *spread* d'options de vente pour celle du consortium.

2. Surveillance parisienne

Dans le modèle de coassurance italien, le modèle de Merton est modifié par des clauses d'exclusion, pour à la fois inciter les banques à réduire leurs risques et protéger l'organisme d'assurance, ici, le consortium. Une institution bancaire jugée trop risquée est exclue du consortium. Si la banque fait défaut après l'exclusion, le gouvernement prend en charge la totalité du défaut. Ce type de clause est mis en



place pour inciter les banques à réduire leur prise de risque de peur d'être exclue d'un bon système de protection ; en fait nous verrons que ce n'est pas si simple et que ce type de clause peut induire des comportements adverses. Cette clause d'exclusion nécessite la modélisation de la *prise de risque de chaque banque*, pour cela nous observons soit le processus des actifs, soit le levier d'endettement.

Si le processus de risque observé reste en dessous (pour le processus des actifs) ou au-dessus (pour le levier d'endettement) d'un certain niveau pendant une durée fixée d'avance, alors la banque est exclue du consortium. Nous supposons dans notre étude que l'exclusion est déterminée par le processus des actifs, si ce dernier reste en dessous du niveau critique L pendant une durée D spécifiée. Les options intervenant alors dans le calcul des garanties du consortium et du gouvernement sont des options parisiennes. L'exposant p rappelle le caractère parisien de la garantie calculée. Nous notons respectivement O_C^p et O_G^p les primes dues au consortium et au gouvernement en présence de la clause parisienne d'exclusion. 1^p désigne la condition de non exclusion de la banque, 1^p vaut 1 en cas de non exclusion, c'est-à-dire si les actifs de la banque observée ne sont pas restés strictement en dessous du niveau L pendant une durée supérieure à D . 1^p vaut 0 sinon *idem est* en cas d'exclusion. L'indicatrice 1^p correspond donc au cas parisien « *down and out* ». La garantie du consortium est conditionnée par la clause de non-exclusion, c'est donc un *spread* d'options de vente parisiennes *down and out*, d'expression :

$$O_C^p = E_Q[(D_T - V_T)^+ - (D_T - V_T - K)^+] 1^p]$$

La garantie totale ne change pas, elle vaut toujours $(D_T - V_T)^+$. C'est en fait la répartition entre les deux assureurs qui change. La couverture du consortium, toutes choses égales par ailleurs, est plus faible en présence de la clause d'exclusion. La garantie non couverte par le consortium en cas d'exclusion est à la charge du gouvernement (cas d'exclusion), elle vaut $O_C - O_C^p$. Ainsi la garantie du gouvernement en présence de la clause parisienne vaut :

$$O_G^p = O_G + (O_C - O_C^p)$$

Notons que la somme des garanties précédentes O_C^p et O_G^p donne bien la valeur totale assurée :

$$O_G^p + O_C^p = O_G + O_C = e^{-rT} E_Q[(D_T - V_T)^+]$$

3. Surveillance cumulative parisienne

La clause d'exclusion pourrait également être de type *cumulative parisienne*. L'exclusion serait alors déclenchée lorsque le processus des actifs passe une durée *totale* en dessous du niveau de référence L supérieure à D éventuellement de manière discontinue. Nous notons en exposant cp pour y faire référence. L'évaluation des garanties dans ce cas se fait alors assez facilement en adaptant les formules précédentes, l'indicatrice 1^p est changée en 1^{cp} pour rappeler que nous étudions ici le cas cumulatif. La valeur de la garantie du

consortium est en fait la formule d'un *spread* d'options de vente cumulatives parisiennes *down and out*. L'expression de la garantie du gouvernement s'établit alors de manière immédiate. Les garanties à évaluer sont fonction des options parisiennes cumulatives, dont on connaît des formules fermées.

Nous venons d'étudier l'impact de clauses parisiennes et cumulatives parisiennes sur la valeur des garanties bancaires. Suivant ces clauses, une banque restant trop longtemps en difficulté est exclue du consortium ; le but étant d'inciter les banques à réduire leurs risques. Or ce type de clause ne fait qu'augmenter la garantie du gouvernement par rapport à celle du consortium. En pratique, des clauses d'exclusion ont donc tendance à induire un comportement contraire à celui souhaité car dans un tel système les banques ne paient aucune prime au gouvernement, mais seulement au consortium. Les banques sont en effet incitées à prendre plus de risque afin de minimiser leur prime au consortium et d'augmenter la subvention du gouvernement. Pour remédier à cet aspect, nous proposons une nouvelle clause, et suggérons d'imposer une taxe à toute banque trop risquée. Il s'agit de faire une provision pour inciter les banques à réduire réellement leurs risques.

4. Pénalité parisienne

Introduisons une nouvelle clause : lorsque les actifs de la banque sous surveillance restent trop longtemps trop bas (de manière parisienne standard), alors, à la fin de l'année, la banque paye une pénalité au consortium mais n'est pas exclue de celui-ci. Cette pénalité est payée *ex post* ; elle peut être comparée à la pénalité que la France et l'Allemagne devraient payer à l'Europe lorsque leurs déficits sur une période donnée sont trop élevés (en pourcentage du produit intérieur brut). Le principal but d'une telle mesure n'est pas d'accroître les difficultés existantes d'une banque présentant déjà des problèmes, mais de la pousser à réduire sa prise de risques. En résumé, il s'agit d'inciter les établissements surveillés à ne pas être en situation de payer la pénalité, donc à garder un niveau d'actifs élevé. Les choix du niveau de la barrière, de la taille de la fenêtre de temps et du montant de la pénalité à payer sont donc déterminants. Ce type de clause peut aussi concerner le niveau d'endettement : le consortium peut imposer aux banques de maintenir leur ratio d'endettement assez bas en leur faisant payer une pénalité si ceux-ci restent trop longtemps trop hauts.

Donnons la valeur de la pénalité dans le cas où la surveillance est sur les actifs. Une pénalité M est payée à la fin de l'année si les actifs de la banque restent une durée supérieure à D en dessous du niveau L . Cette clause correspond du point de vue de l'institution dépositaire à un versement supplémentaire en cas de non-respect des normes fixées. Pour le consortium, cette clause ou « chargement de sécurité *ex post* » peut être évaluée en début de chaque année par la formule :

$$E_Q(e^{-rT} M 1^p)$$

où 1^p vaut 1 si le comportement de la banque est tel qu'elle doit payer la pénalité. Cette formule correspond à celle d'une option parisienne digitale. Ce n'est pas une prime car on paye la pénalité *ex post*, il s'agit d'une estimation de la valeur de la garantie.

Nous venons, à travers l'exemple du système italien de garantie des dépôts bancaires, de donner différentes applications des options parisiennes à la surveillance des établissements de crédit. Passons à présent à un nouveau champ d'application des options parisiennes : la théorie des options réelles.

III Les options réelles et le caractère parisien

Nous nous intéressons à présent aux utilisations possibles des options parisiennes en théorie des options réelles. Ce sujet, initié dans les années soixante-dix et pleinement développé dans les années quatre-vingt, est celui de l'évaluation des entreprises et de leurs projets d'investissement par le recours aux concepts et méthodes de la théorie des options. Parmi les nombreux travaux dans ce champ, nous pouvons citer ceux de Myers (1977) et de Kester (1984) qui ont clairement montré l'analogie existant entre une opportunité d'investissement et une option européenne d'achat. Pindyck (1991) a, quant à lui, montré l'importance que peut avoir dans l'évaluation d'un projet d'investissement la possibilité de le différer dans le temps. Pour plus de détails sur cette théorie, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage bien connu de Dixit et Pindyck (1994).

Il existe souvent un délai entre la décision d'investir et la date de réalisation de l'investissement pour un projet considéré. Ce délai sera au cœur de cette synthèse. Classiquement omis dans les évaluations, il existe néanmoins et peut correspondre au temps nécessaire pour rassembler des fonds ou pour faire accepter une décision. La présence d'un délai permet à l'entrepreneur d'abandonner son projet en cas d'évolution défavorable de la variable de décision (nous supposons ici qu'il existe une unique variable de décision observée par l'entrepreneur et guidant ses choix : cours du pétrole, valeur de l'eurodollar...). L'existence d'un délai entre les instants de décision et d'implémentation correspond à l'existence d'une option d'abandon sous-jacente au projet. Nous distinguerons deux cas particuliers de mode d'abandon : *l'abandon européen*, qui consiste à renoncer ou non à l'investissement à la date d'implémentation, et *l'abandon parisien*, où l'état de la variable de décision pendant le délai et par rapport à une barrière donnée est considéré. Gauthier (2002) montre comment les options parisiennes permettent d'approcher la situation d'abandon *optimal* et d'étudier l'impact d'une option d'abandon sur la valeur d'un projet d'investissement.

1. Cadre général

On considérera des investissements irréversibles. Cette hypothèse est particulièrement réaliste si l'on étudie des industries telles que l'industrie pétrolière. La variable de décision sera à partir d'ici notée S_t . Les agents sont neutres au risque et agissent de manière rationnelle. On suppose que le marché est complet et que la variable de décision est observable par le marché. Nous nous plaçons dans le cadre classique de Black et Scholes ; r désigne le taux d'intérêt sans risque. Notons $V(S_t, t)$ la valeur de l'investissement à la date

t et $f(S_t, t)$ la fonction de profit du projet. Nous supposons que la variable de décision suit la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t$$

où μ et σ sont des constantes strictement positives et $(Z_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien. Nous notons $S_0 = x$ et supposons que la fonction de profit du projet en t est une fonction déterministe, invariante dans le temps, ne dépendant que de la valeur de la variable de décision S_t :

$$f(x) = \psi x^\gamma$$

Désignons par ρ le taux de rendement espéré par l'investisseur (la cohérence du modèle nécessite de choisir $\rho \leq \mu$). Notons $F(S_t, \infty)$ l'espérance des flux futurs actualisés en $t = 0$ d'un investissement effectué exactement à l'instant t sans tenir compte du délai d'investissement. On peut montrer que :

$$F(S_t, \infty) = \int_t^\infty e^{-\rho(s-t)} E_{S_t}[f(S_s)] ds = \Delta S_t^\gamma$$

où Δ est donné par :

$$\Delta = \frac{\psi}{\rho - \gamma \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} (\gamma - 1) \right)}$$

L'hypothèse markovienne sur S_t et la fonction de profit f invariante dans le temps donnent ainsi lieu à un projet dont la valeur dépend du temps uniquement à travers la valeur de S_t . L'instant optimal pour investir est de ce fait l'instant où la variable de décision prend la valeur h^* optimale (cf. Dixit et Pindyck, 1994). Notons $T_h(S)$ l'instant de premier passage du processus S_t par la valeur h . On le définit mathématiquement par :

$$T_{h*}(S) = \inf \{s \geq 0, S_s = h\}$$

Avec ces notations, l'investissement a lieu à l'instant optimal $T_h(S)$ et cela correspond à une clause du type option d'achat américaine.

2. Présence d'un délai

Étudions maintenant l'impact du délai entre la prise de décision et l'investissement sur la valeur d'un projet. Évaluons le projet dans le cas général où la décision d'investissement est prise en $T_h(S)$ et l'investissement est réalisé en $\theta \geq T_h(S)$. Cette dernière date est supposée indépendante de $T_h(S)$ et de la trajectoire de S jusqu'à ce temps. Supposons de plus que S_θ est indépendant de θ et notons C_e le coût de l'investissement effectué en θ . La valeur de l'investissement est donnée initialement dans le cas $S_0 < h$ par :

$$V(S_0, h, \Delta, C_e, \theta) = E_{S_0} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} f(S_t) 1_{t \geq \theta} dt \right] - C_e E_{S_0} [e^{-\rho \theta}]$$

Il est alors possible de calculer V^* , valeur de l'investissement pour la barrière optimale h^* . Comparons à présent cette valeur V^* à la valeur d'un second projet analogue mais sans délai d'implémentation $\theta = T_{h^*}$. Le rapport de ces deux valeurs, $R(\theta)$, s'exprime comme :

$$R(\theta) = \frac{V^*}{V_{\theta = T_{h^*}}} = E_{h^*}[e^{-\rho(\theta - T_{h^*})}] E_{h^*}\left[\left(\frac{S_\theta}{h^*}\right)^\gamma\right]^{\frac{\xi_1}{\gamma}}$$

$$\text{où } \xi_1 = \frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2} + \sqrt{\frac{2\rho}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\mu}{\sigma^2}\right)^2}$$

L'étude de $R(\theta)$ met en évidence deux effets. Tout d'abord étudions l'impact de la valeur de la variable de décision S_θ (au moment de l'investissement en θ) sur ce ratio. Si S_θ est faible devant h^* , alors le premier projet perd de sa valeur du fait du délai. $R(\theta)$ augmente ainsi avec S_θ . Remarquons que si $S_\theta = S_{T_{h^*}} = h^*$ alors l'état de la variable de décision n'a pas changé et pourtant la valeur du premier projet a diminué. En conséquence, la valeur d'un projet est fortement diminuée lorsqu'il existe un délai d'implémentation après la prise de décision d'investir. Il apparaît également que la baisse de la valeur du projet d'investissement est d'autant plus marquée que le délai $\theta - T_{h^*}$ est grand.

3. Abandon européen

Gauthier (2002) décrit ce qu'il appelle une option d'abandon européenne. Supposons que le délai soit une constante, notée D . Il s'agit d'investir en $T_h(S) + D$ si la valeur de la variable de décision est supérieure à un niveau h' . Dans le cas contraire, l'investissement est différé, on attend que la variable de décision passe à nouveau au-dessus du niveau h , et qu'elle soit au-dessus du niveau h' après D unités de temps pour effectuer l'investissement. Formons un nouveau rapport $R(\theta)$ entre le projet avec le principe d'abandon européen décrit ci-dessus et le projet avec un délai d'implémentation D fixe sans option d'abandon. Ce rapport est une fonction décroissante du quotient h'/h . Nous notons de plus que $R(\theta)$ est toujours inférieur ou égal à 1, valeur obtenue en faisant tendre h'/h vers 0. Ainsi l'option d'abandon européenne, c'est-à-dire le droit de changer d'avis en $T_h(S) + D$ une fois la décision prise en T_h , n'a aucune valeur.

4. Abandon parisien/abandon américain

D désigne toujours le délai minimum nécessaire pour rassembler les fonds. On observe la variable de décision S et si elle atteint un niveau h et reste au-dessus de ce niveau pendant une durée supérieure à D , alors l'investissement a lieu. Dans le cas contraire, le projet est abandonné, l'abandon est dit *parisien*. L'investissement a lieu à l'instant $\theta = G_{D,h}^+(S)$ défini mathématiquement avec les notations de la partie 1 par :

$$G_{D,h}^+(X) = \inf\{t > 0 | (t - g_t^h(X))1_{X(t) \geq h} \geq D\}$$

Il s'agit, du point de vue de l'investisseur, de s'assurer que la situation reste favorable pendant toute la durée d'implémentation. Le niveau h optimal est ici inférieur au

cas européen où seule comptait la valeur à l'échéance du délai. La valeur de l'investissement avec abandon parisien est supérieure à la valeur de l'investissement avec abandon européen. Ainsi, l'option d'abandon parisien donne une première idée de l'option d'abandon américain (qui correspond à abandonner de manière optimale le projet une fois la durée D écoulée). Gauthier (2002) a montré que la valeur d'une option d'abandon parisien avec une barrière exponentielle (au lieu d'une barrière constante h) a plus de valeur. Ainsi il est clair que la barrière optimale doit nécessairement dépendre du temps, cependant il est beaucoup plus facile d'implémenter l'option d'abandon parisien que le cas exponentiel. Le cas parisien peut donc être utilisé pour approcher la valeur d'une option d'abandon américain.

L'optimalité de la décision d'investissement change lorsque plusieurs entreprises sont en compétition. Dans un contexte compétitif, les entreprises ont un comportement stratégique, et la détermination du niveau optimal d'un projet tient compte du fait de préempter sur un concurrent : il s'agit potentiellement pour l'entreprise de devancer ses concurrents en étant la première à investir. Dixit et Pindick (1994) et Lambrecht et Perraudin (2003) ont étudié le cas où deux entreprises similaires sont en compétition. Dans ce cas, le critère de décision optimal est obtenu par la méthode d'actualisation des *cash-flows* futurs. Gauthier (2002) a montré comment les options parisiennes peuvent être utilisées pour étudier une situation dans laquelle deux entreprises très différentes sont en compétition sur un même projet d'investissement : une entreprise importante (pour laquelle il existe un délai incompressible entre la prise de décision et l'investissement) et une petite société qui peut effectuer un investissement immédiat.

Les options parisiennes et l'étude des propriétés des temps parisiens permettent d'obtenir des résultats quant à la surveillance de la variable de décision sur laquelle sont indexés les profits du projet étudié. Si les options parisiennes se montrent des outils de modélisation et de décision puissants dans le cadre de l'évaluation des garanties bancaires et des options réelles, il est encore un domaine où une utilisation raffinée de ces produits s'avère fructueuse : l'étude du défaut d'une entreprise et la théorie structurelle de la firme.

IV. La loi américaine des faillites : une autre surveillance parisienne

Intéressons-nous à présent à l'un des champs d'application des options parisiennes les plus prometteurs : la représentation de la mise sous surveillance d'une entreprise lors d'un processus de renégociation de sa dette. Les modèles classiques de la structure de la firme et de l'évaluation de sa dette ont toujours supposé que la faillite correspondait à une liquidation pure et simple des actifs, typiquement ce qui se passe aux États-Unis lors d'une mise en jeu du chapitre 7 de la loi des faillites. Or, cela est sans compter avec l'existence de procédures mettant l'entreprise sous observation, puis à décider à l'issue d'une période généralement laissée à l'appréciation du juge de l'éventuelle poursuite de ses activi-



LE POINT SUR...

tés. Typiquement, aux États-Unis, les sociétés se placent sous la protection du chapitre 11 et, ainsi, évitent la liquidation immédiate de leurs actifs. L'intérêt social de telles procédures est évident, et il est intéressant de noter que le Royaume-Uni est nettement moins permissif en ce domaine que les États-Unis ou la France (qui d'ailleurs se dirige vers une réglementation encore plus proche de la réglementation américaine). Si l'on se concentre sur le chapitre 11, plusieurs études empiriques ont montré qu'à l'issue d'un tel processus, seulement 10 à 20 % des entreprises sont mises en liquidation, alors qu'une proportion très importante d'entreprises redressées aurait disparu par une simple application du chapitre 7.

La question se pose donc de pouvoir construire des modèles structurels de la firme capables de modéliser le défaut non uniquement comme un événement brutal induisant une liquidation (comme dans les approches classiques de Merton, 1974 ; Black et Cox, 1976 ; Leland, 1994 ou Longstaff et Schwartz, 1995) mais également comme l'entrée dans un processus de surveillance. Les premiers articles visant à répondre à cette question sont ceux de François et Morellec (2004) et de Moraux (2004). De nouveau, il apparaît clairement que la mise sous surveillance par une juridiction peut-être représentée en première approximation par une observation parisienne des actifs de l'entreprise. Les premiers auteurs ont adopté une approche parisienne standard, tandis que Moraux a préféré une approche parisienne cumulative. Nous aborderons successivement les deux approches, mais il est important de remarquer dès à présent qu'elles ne sont pas strictement analogues et qu'elles correspondent à des effets de mémoire bien distincts sur le « passif judiciaire » de l'entreprise.

1. Approche parisienne

François et Morellec (2004) partent du cadre de Leland (1994) où le taux sans risque est constant, les actifs suivent un processus lognormal, la firme se finance par le biais d'obligations de maturité infinie, il existe un impôt sur les sociétés, des coûts s'imputent sur la valeur des actifs en cas de faillite, la valeur de ces actifs est indépendante de la structure de financement retenue, et où il s'agit d'optimiser la valeur de la firme et principalement de calculer les valeurs de la dette et des fonds propres. Comme mentionné plus haut, le modèle de Leland ne permet pas de prendre en compte un défaut survenant sous la forme d'une renégociation sous la protection du chapitre 11. François et Morellec modélisent cet aspect de la façon suivante : l'entreprise fait défaut quand les actifs atteignent un niveau critique trop bas, ceci entraîne une mise sous surveillance par l'autorité judiciaire *ad hoc*, la liquidation n'est prononcée que si les actifs sont restés trop longtemps (plus qu'une période de grâce donnée) de manière continue (cas parisien standard) en dessous de ce niveau. Noter que François et Morellec ne permettent pas une situation où l'entreprise serait mise immédiatement en liquidation. Ces auteurs incluent en revanche un jeu de stratégie à la Nash où les actionnaires et les obligataires se partagent un pouvoir de négociation en cas de difficulté financière.

François et Morellec obtiennent des formules d'évaluation de la firme, de sa dette et de ses fonds propres, en prenant

en compte non seulement des coûts de faillite ultime (si le processus de négociation a abouti à une liquidation de la firme) mais également des coûts liés à la renégociation quand elle a lieu (le paiement des coupons étant alors suspendu). Les formules obtenues le sont par des arguments classiques du type de ceux que l'on trouve chez Leland. Il est à noter qu'elles ne font intervenir que le temps parisien et non un mouvement brownien pris en ce temps : elles sont pleinement développables en formules fermées ne faisant apparaître que des fonctions de répartition normale (plus précisément la fonction simple définie en première section et qui s'exprime directement à partir de la fonction de répartition normale). Cela est un avantage non négligeable pour qui n'est pas familier avec les transformées de Laplace inverses : toutes les formules obtenues par François et Morellec sont aisément implémentables. Ces auteurs peuvent alors notamment calculer le niveau de faillite qui sera préféré par les actionnaires et obtenir les courbes présentant la dépendance des marges de crédit et niveaux optimaux de levier d'endettement en fonction de la longueur de la période de surveillance.

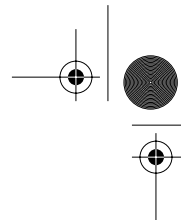
2. Approche cumulative parisienne

Venons-en à présent à l'approche de Moraux (2004). Cet auteur part du modèle de Black et Cox (1976) et non du modèle de Leland (1994) comme François et Morellec (2004). Ce cadre permet notamment le traitement de dette de maturité finie. Cependant, là n'est pas l'originalité de son apport. De fait, Moraux remarque à juste titre qu'il existe une « histoire judiciaire » de l'entreprise. Plus précisément, il ne serait pas tolérable qu'une entreprise se mette systématiquement sous la protection du chapitre 11, pour éviter notamment de payer des coupons, en ressorte systématiquement avant la date fatidique de mise en liquidation pour de nouveau initier une procédure de protection. Clairement, la juridiction compétente sera de moins en moins encline à accorder de longues périodes de répit si l'entreprise a déjà bénéficié du chapitre 11. Moraux suggère donc de modéliser la mise sous surveillance, autrement dit le chapitre 11, par un caractère cumulatif parisien. Cette fois-ci, tout le temps passé par les actifs en dessous du niveau critique est comptabilisé, que ce temps ait été compté lors d'une ou plusieurs mises sous surveillance.

Ici, il apparaît clairement qu'est prise en compte l'appréciation du juge : les processus judiciaires ne sont pas des procédures automatiques et systématiquement mimétiques. Il convient, lors de la modélisation de ne pas oublier que l'entreprise et ses difficultés ont une histoire, et que cela a forcément un effet sur la valeur de la firme, de ses fonds propres et de sa dette. Par ailleurs, la modélisation de procédures complexes où les aspects discrétionnaires et stratégiques ne sont pas absents n'apparaît pas comme évidente. Nous insistons sur le fait que ce n'est pas parce qu'il est difficile de modéliser, et donc de comprendre, le réel, que cela ne doit pas être réalisé ou du moins tenté. Concluons cette remarque par une citation de Samuel Karlin : « *the purpose of models is not to fit the data but to sharpen the questions* ».

Dans l'approche de Moraux, les formules d'évaluation des fonds propres et de la dette (comportant éventuellement





des compartiments variés, comme cela est possible avec un modèle à la Black et Cox), s'écrivent comme des options parisiennes cumulatives. Elles sont donc calculables par quadratures multiples. Rappelons que l'évaluation d'options parisiennes de type cumulatif, par le biais de ces quadratures, a été menée par Hugonnier (1999) et complétée par Moraux (2002). En conclusion, Moraux (2004) aboutit à un modèle où l'histoire judiciaire de l'entreprise est prise en compte, au-delà d'une unique période de mise sous surveillance ; ce modèle est une alternative au modèle de François et Morellec (2004) où le « compteur » est systématiquement remis à zéro, où le juge se montre indulgent et où une entreprise peut se mettre sous la protection du chapitre 11 exactement dans les mêmes conditions qu'une ou plusieurs précédentes fois éventuelles. Les deux modèles peuvent correspondre à des pratiques différentes selon les pays, et il est donc impossible dans l'absolu de dire lequel des deux a le pouvoir explicatif le plus fort. En revanche, on peut légitimement se demander si entre les deux extrêmes (mémoire nulle et mémoire totale), il n'est pas possible de construire un modèle à mémoire partielle.

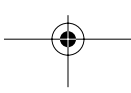
3. Approche mixte

Galai, Raviv et Wiener (2003) ont justement proposé un cadre où la mémoire de l'institution judiciaire sur le passé de l'entreprise est mixte. En effet, il ne semble pas raisonnable de pondérer autant un passé judiciaire remontant à une dizaine d'années qu'un passé judiciaire remontant à deux ans. Galai, Raviv et Wiener construisent donc un indicateur critique qui est une pondération du temps passé en dessous du niveau de surveillance. Cette pondération donne plus d'importance aux périodes récemment passées sous le niveau par rapport aux périodes plus antérieures. Il est intéressant de noter que cet indicateur critique est également construit en surpondérant le temps passé très en deçà du niveau critique. Cela rejoint le concept bien connu de sévérité de la ruine, concept appartenant à la théorie du risque des compagnies d'assurance. L'approche de Galai, Raviv et Wiener permet classiquement de calculer la valeur de la dette, des marges de crédit... En revanche, il faut remarquer que la construction de leur temps pondéré (déclenchant la liquidation quand il atteint une durée trop élevée) ne leur permet pas d'avoir des formules explicites ou même semi explicites (recourant à des transformées de Laplace inverse) et que les différents calculs doivent être menés en recourant à la méthode de Monte-Carlo. De manière analogue, Broadie, Chernov et Sundaresan (2004) ont construit un modèle n'aboutissant pas à des formules explicites et se voulant plus général que les modèles de François et Morellec et de Moraux. Ces auteurs permettent deux régimes différents : soit la firme est mise sous surveillance quand les actifs passent en dessous d'un certain seuil (et alors classiquement la liquidation à lieu si la firme reste trop longtemps sous ce seuil), soit la liquidation a lieu si la valeur des actifs passe en dessous d'un seuil critique

plus bas que le précédent seuil. Leur article, fondé entre autres sur un emploi de l'EBIT, fait remarquer à juste titre que la maximisation des fonds propres n'est pas la même chose que la maximisation de la valeur de la firme, en toute généralité. Est également posée la question du transfert optimal du contrôle entre les actionnaires et les créanciers. Enfin, pour conclure, nous invitons le lecteur à consulter l'article de François (1996) où une remarquable revue des différentes clauses contractuelles obligatoires est réalisée et où apparaît, pour la première fois dans la littérature à notre connaissance, l'emploi d'options parisiennes au sein de problèmes de finance d'entreprise formalisée.

V Conclusion

Notre étude des options parisiennes et de leurs applications conduit à faire plusieurs remarques. Il apparaît clairement que la finance d'entreprise, c'est-à-dire les problèmes d'évaluation d'entreprises, de gestion des banques, d'options réelles..., peut bénéficier grandement du formalisme couramment employé en finance de marché. Approcher ces problèmes par des modélisations, même si cela ne répond pas à toutes les questions, est fructueux en enseignements – au-delà des valorisations obtenues en cours de route. L'utilisation des options parisiennes, c'est-à-dire la représentation d'un comportement humain, et parfois de pratiques judiciaires, de surveillance d'un déterminant critique par l'emploi d'excursions d'un processus stochastique, est riche de sens. Il peut être objecté que cela n'est pas la représentation la plus précise qu'il est possible d'obtenir ; mais il peut également être répondu que l'approche présentée ici n'est pas inexacte, qu'elle mérite seulement d'être poussée encore plus loin. Par ailleurs, au-delà de ce mode de représentation, le fait de pouvoir manipuler lesdites excursions (avec le papier fondateur de Chesney, Jeanblanc et Yor, 1997) est intéressant dans le sens où l'évaluation devient possible et où donc les régulateurs ont en main des outils normatifs pour mener à bien leurs contrôles et éventuellement déclencher des procédures. Insistons pour finir sur le fait que les différents travaux présentés ici reposent tous sur des hypothèses fortes : marchés complets, cadre de Black et Scholes... Pourtant, avec l'arrivée des nouvelles normes IAS et IFRS, ces hypothèses, certes discutables, iront de plus en plus d'elles-mêmes pour les régulateurs. Ces derniers auront ainsi de plus en plus tendance à utiliser des méthodes d'évaluation optionnelles bien connues des financiers de marché depuis maintenant plus de trente ans. Nous ne concluons pas sur la pertinence de ces hypothèses, mais rappellerons que la théorie des options, et en particulier des options parisiennes, s'avère et s'avérera de plus en plus utile pour comprendre et résoudre de nombreux grands problèmes de finance d'entreprise. ■





Bibliographie

Bernard C., Le Courtois O., Quittard-Pinon F. : « Evaluation Numérique des Options Parisiennes », *Banque & Marchés*, n° 69, 2004.

Bernard C., Le Courtois O., Quittard-Pinon F. : « A Study of Mutual Insurance for Bank Deposits », *The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory*, December issue, 2005.

Black F., Cox J. : « Valuing Corporate Securities : Some Effects of Bond Indenture Provisions », *Journal of Finance*, 1976.

Broadie M., Chernov M., Sundaresan S. : « Optimal Corporate Securities Values in the Presence of Chapter 7 and Chapter 11 », Working Paper, 2004.

Chesney M., Jeanblanc M., Yor M. : « Brownian Excursions and Parisian Barrier Options », *Advances in Applied Probability*, 1997.

Chesney M., Cornwall J., Jeanblanc M., Kentwell G., Yor M. : *Parisian Pricing, Risk*, 1997.

De Giuli M., Maggi M., Paris F. : « Pricing Mutual Bank Deposit Guarantees », Working Paper, 2003.

Dixit A. K., Pindyck R. S. : *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.

Federal Deposit Insurance Corporation : *Options Paper*, FDIC Publications, 2000.

François P. : « Contrat de dette et formes optionnelles de l'action », *Revue Finance*, 1996.

François P. : « Applications of Option Theory to the Analysis of Debt Contracts », Thèse de Doctorat, Université de Paris I, 1999.

François P., Morellec E. : « Capital Structure and Asset Prices : Some Effects of Bankruptcy Procedures », *Journal of Business*, 2004.

Galai D., Raviv A., Wiener Z. : « Liquidation Triggers and the Valuation of Equity and Debt », Working Paper, 2003.

Gauthier L. : « Real Options and Exotic Options, a Probabilistic Approach », Thèse de Doctorat, Université Paris-I, 2002.

Gauthier L., Morellec E. : « Noisy Information and Investment Decisions : a Note », *Finance*, 1999.

Haber R., Schönbucher P., Wilmott P. : « Pricing Parisian Options », *Journal of Derivatives*, 1999.

Hartley P. : « Pricing Parisian Options by Laplace Inversion », *Decisions in Economics and Finance*, 2002.

Hugonnier J. : « The Feynman-Kac Formula and Pricing Occupation Time Derivatives », *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 1999.

Jeanblanc M., Yor M., Chesney M. : *Mathematical Methods for Financial Markets*, Springer-Verlag, 2005.

Kwok Y. K., Lau K. W. : « Pricing Algorithms for Options with Exotic Path Dependence », *Journal of Derivatives*, 2001.

Laeven L. : « Pricing of Deposit Insurance », World Bank Policy Research Working Paper 2871, 2002.

Lambrecht B. M., Perraudin W. R. M. : « Real Options and Preemption under Incomplete Information », *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2003.

Leland H. : « Corporate Debt Value, Bond Covenants, and Optimal Capital Structure », *Journal of Finance*, 1994.

Longstaff F., Schwartz E. : « A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt », *Journal of Finance*, 1995.

Merton R. : « On the Pricing of Corporate Debt : the Risk Structure of Interest Rates », *Journal of Finance*, 1974.

Merton R. : « An Analytic Derivation of the Cost of Deposit Insurance and Loan Guarantees », *Journal of Banking and Finance*, 1977.

Morau F. : « On Pricing Cumulative Parisian Options », *Revue Finance*, 2002.

Morau F. : « Valuing Corporate Liabilities when the Default Threshold is not an Absorbing Barrier », Working Paper, 2004.

Revuz D., Yor M. : *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer-Verlag, 1999.

Schröder M. : « Brownian Excursions and Parisian Barrier Options : a Note », *Journal of Applied Probability*, 2003.

